ÜBER INVOLUTORISCHE TRANSFORMATIONEN

INAUGURAL-DISSERTATION

ZUR ERLANGUNG DER PHILOSOPHISCHEN DOKTORWÜRDE
VORGELEGT DER HOHEN PHILOSOPHISCHEN FAKULTÄT
DER ALBERT LUDWIG-UNIVERSITÄT FREIBURG I. BR.

VON

ALOIS SCHMITT
AUS WALDSTETTEN (BADEN)

1904
DRUCK VON B. G. TEUBNER IN LEIPZIG

Gedruckt mit Genehmigung der philosophischen Fakultät:

Der Dekan:
HIMSTEDT.

Der Referent:
LÜROTH.

357

Einleitung.

Wenn die Koordinaten der Punkte einer Fläche durch die rationalen Funktionen $f(u, v)$, $g(u, v)$ und $h(u, v)$ bestimmt sind, so entspricht jedem Punkte der uv-Ebene ein Punkt der Fläche, aber einem Punkte der Fläche kann eine Gruppe von n Punkten auf der Ebene zugehören.

Herr Lüroth hat nun Untersuchungen darüber angestellt, ob man nicht andere rationale Funktionen ζ, ϑ von u, v finden könne, so daß sich f, g, h als rationale Funktionen von ζ und ϑ darstellen lassen, und zwar in der Weise, daß man für jeden Wert u, v, also für jeden Punkt der Fläche, nur ein System $\zeta\vartheta$ erhält. (Rationale Flächen und involutorische Transformationen, Freiburg i. Br. 1889.) Herr Lüroth gibt einige allgemeine Betrachtungen über die Aufgabe, die Funktionen ζ, ϑ zu bestimmen, und wendet dieselben dann auf Beispiele an.

Die Punkte einer solchen Gruppe stehen durch den zugehörigen Flächenpunkt miteinander in Beziehung. Die Ableitung der Punkte aus einem von ihnen wird eine involutorische Transformation genannt. Nun haben die f, g, h für alle Punkte einer Gruppe den gleichen Wert und, wenn der zu beweisende Satz richtig ist, auch die ζ, ϑ. Sie werden daher invariante Funktionen genannt.

Es werden dann in der genannten Arbeit noch folgende Sätze bewiesen:

Alle invarianten Funktionen entstehen aus symmetrischen Funktionen der Punkte einer Gruppe. Lassen sie sich rational durch zwei derselben ausdrücken, so seien diese ein Hauptpaar genannt. Ein solches Hauptpaar kann an Stelle der ζ, ϑ treten. Somit ist der Beweis des angeführten Satzes zurückgeführt auf den Nachweis, daß bei jeder involutorischen Transformation ein Hauptpaar existiert. Man braucht aber nur diejenigen einfachsten Typen von involutorischen Transformationen zu unter-

suchen, auf welche sich alle anderen durch Cremonasche Umformungen zurückführen lassen.

Im Anschluß daran hat Herr Lüroth als Beispiel den Fall untersucht, wo einem Punkte der Fläche drei Punkte der Ebene entsprechen, mit Beschränkung darauf, daß die Punkte der Gruppe durch Cremonasche Transformationen U aus einem derselben hervorgehen. Dabei werden nur diejenigen Umformungen U ins Auge gefaßt, bei denen ein Büschel von geraden Linien entweder in sich oder in ein anderes übergeht. Die Koordinaten der Punkte waren xy für P, $\xi\eta$ für UP, $\mathfrak{x}\mathfrak{y}$ für U^2P. Bestimmt dann x resp. ξ, $\mathfrak{x}$ die Geraden des einen Büschels und y resp. η, $\mathfrak{y}$ die des anderen, so ist ξ entweder nur von x oder nur von y abhängig. Durch Aufstellung der Umformungen U und Reduktion derselben auf den Typus $\xi = x$ und $\eta = iy$ wurde gezeigt, daß in diesem Falle ein Hauptpaar existiert. Daß eine solche Reduktion immer möglich ist, hat Herr Cantor gezeigt: Premiers fondements pour la théorie des transformations périodiques univoques. Naples 1891.

Durch Herrn Lüroth wurde ich auf diese Untersuchungen aufmerksam gemacht und erhielt von ihm die Anregung, dieselben Untersuchungen für eine Gruppe von 4, in einem spez. Falle auch von n Punkten durchzuführen. Dies ist der Inhalt vorliegender Arbeit.

I. Abschnitt.

Involutorische Transformationen einer Gruppe von vier Punkten.

Die Koordinaten der Punkte sind in der ganzen Arbeit mit $x_1 y_1$, $x_2 y_2$ usw. bezeichnet.

Erstes Kapitel.

Wenn ein Linienbüschel in sich selbst übergehen soll, so hängt bei passender Wahl der Koordinaten x_2 nur von x_1 ab, während y_2 eine Funktion von x_1 und y_1 ist.

Es sollen zunächst die Transformationen für x_2 und dann diejenigen für y_2 aufgestellt und reduziert werden.

I.

Da die Beziehung zwischen x_1 und x_2 eindeutig umkehrbar sein soll, so muß x_2 eine lineare Funktion von x_1 sein, deren Koeffizienten von y_1 unabhängig sind; also:

$$x_2 = \frac{\alpha x_1 + \beta}{\gamma x_1 + \delta}.$$

Wenn $\gamma = 0$ ist, dann reduziert sich die Transformation auf

(A) $$x_2 = a + b x_1.$$

Wenn $\gamma \neq 0$ ist, dann kann man sie durch

$$x_1 = u_1 - \frac{\delta}{\gamma} \quad \text{und} \quad x_2 = u_2 - \frac{\delta}{\gamma}$$

reduzieren auf die Form:

$$u_2 = \frac{a}{u_1} + b.$$ Man braucht also nur noch

(B) $$x_2 = \frac{a}{x_1} + b$$ zu untersuchen.

Die Koeffizienten der Transformation werden bestimmt, indem man x_5 bildet und gleich x_1 setzt.

$$\text{A:}\ x_2 = a + bx_1,$$

$$x_3 = a + ba + b^2x_1, \quad x_4 = a + ab + ab^2 + b^3x_1,$$

$$x_5 = x_1 = a + ab + ab^2 + ab^3 + b^4x_1.$$

Man hat also in diesem Falle für a und b die Gleichungen:

$$a(1 + b + b^2 + b^3) = 0 \quad \text{und} \quad b^4 = 1.$$

Es sind zwei Lösungen möglich:

(1) $\qquad a = 0, \quad b = i^\nu, \quad \text{wo} \quad \nu = 0, 1, 2, 3.$

Im Falle $\nu = 3$ hat man $x_2 = i^3 x_1$, was durch $x_1 = i : u_1$ und $x_2 = i : u_2$ auf $u_2 = iu_1$ reduziert wird. Es bleiben also folgende Transformationen:

$$x_2 = x_1; \quad x_2 = ix_1; \quad x_2 = i^2x_1.$$

(2) $\qquad a \neq 0, \quad b = i^\nu,$ wo aber bei ν alle durch 4 teilbaren Zahlen ausgeschlossen sind. Die Transformation heißt also: $x_2 = a + i^\nu x_1$.

Setzt man nun:

$$x_1 = u_1 + \frac{a}{1 - i^\nu}, \quad x_2 = u_2 + \frac{a}{1 - i^\nu},$$

so folgt $\qquad u_2 = i^\nu u_1,$

also der unter A (1) schon erledigte Fall.

$$\text{B:}\ x_2 = \frac{a}{x_1} + b.$$

Man bildet wieder x_5 und setzt es gleich x_1: $x_2 = \dfrac{a + bx_1}{x_1}$,

$$x_3 = \frac{ab + (a + b^2)x_1}{a + bx_1},$$

$$x_4 = \frac{a(a + b^2) + b(2a + b^2)x_1}{ab + (a + b^2)x_1},$$

$$x_5 = x_1 = \frac{ab(2a + b^2) + [a(a + b^2) + b^2(2a + b^2)]x_1}{a(a + b^2) + b(2a + b^2)x_1}.$$

Wenn man den Nenner auf die linke Seite nimmt und beachtet, daß der Koeffizient von x_1^2 Null sein muß, so folgt:

$b(2a + b^2) = 0$, womit auch der Koeffizient von x_1^1 und das absolute Glied Null werden.

Man hat also für a und b die eine Gleichung:

$$b(2a + b^2) = 0.$$

Es sind wieder zwei Lösungen möglich:

(1) $b = 0$, a beliebig, gleich k^2, also

$$x_2 = k^2 : x_1. \quad \text{Setzt man hier}$$

$$x_1 = \frac{(1 + u_1)\,k}{(1 - u_1)}, \quad x_2 = \frac{(1 + u_2)\,k}{(1 - u_2)}, \quad \text{so folgt:}$$

$$\frac{k\,(1 + u_2)}{(1 - u_2)} = \frac{k^2\,(1 - u_1)}{k\,(1 + u_1)} \quad \text{oder}$$

$$1 + u_2 + u_1 + u_1 u_2 = 1 - u_2 - u_1 + u_1 u_2,$$

$$u_2 = - u_1.$$

(2) $b \neq 0$, also $a = - b^2 : 2$; dann ist die Transformation

$$x_2 = b - \frac{b^2}{2\,x_1}.$$

Setzt man hier $x_1 = \dfrac{(1 + u_1)\,b}{1 + (1 - i)\,u_1}$ und $x_2 = \dfrac{(1 + u_2)\,b}{1 + (1 - i)\,u_2}$, so folgt:

$$\frac{(1 + u_2)\,b}{1 + (1 - i)\,u_2} = b - \frac{b^2\,(1 + (1 - i)\,u_1)}{(1 + u_1)\,b \cdot 2} \quad \text{oder}$$

$$0 = - 1 - (1 + i)\,u_2 - (1 - i)\,u_1,$$

$$(1 + i)\,u_2 = - 1 - (1 - i)\,u_1,$$

$$\text{oder } u_2 = - \frac{1}{1 + i} + i^3 u_1, \quad \text{da } \frac{1 - i}{1 + i} = - i \text{ ist.}$$

Diese Transformation wurde Seite 6 A (2) schon behandelt.

Man hat also mit teilweiser Änderung der Bezeichnung folgende drei Typen:

$$x_2 = x_1,$$

$$x_2 = i x_1,$$

$$x_2 = i^2 x_1.$$

II.

Die Beziehung zwischen y_2 und y_1 muß wegen der eindeutigen Umkehrbarkeit in y_1 linear sein, während die Koeffizienten rationale Funktionen von x_1 sind. Die Transformation läßt sich analog wie die für x_2 auf eine der beiden Formen bringen:

$$y_2 = A + By, \quad y_2 = \frac{A + By_1}{y_1}.$$

A: $y_2 = A + By_1$.

Man darf hier A als ganze rationale Funktion annehmen. Denn wäre es gebrochen von der Form $\frac{P}{N}$, so würde man durch $y_2 = v_2 : N(x_1)$ und den entsprechenden Ausdruck für y_1

$$v_2 = P(x_1) + \frac{BN(x_1)}{N(i^\nu x_1)} v_1$$

erhalten. Die an A resp. B vorgenommene Transformation soll mit einem Akzent bezeichnet werden, dann ist:

$$y_3 = A' + B'A + BB'y_1, \quad y_4 = A'' + B''A' + B'B''A + BB'B''y_1,$$
$$y_5 = y_1 = A''' + A''B''' + A'B''B''' + AB'B''B''' + BB'B''B'''y_1.$$

Also hat man für A und B die Gleichungen:

$$(1) \qquad BB'B''B''' = 1,$$
$$(2) \qquad A''' + A''B''' + A'B''B''' + AB'B''B''' = 0.$$

α) $x_2 = x_1$.

In diesem Falle sind die Gleichungen:

$$B^4 = 1 \quad \text{und} \quad A(1 + B + B^2 + B^3) = 0,$$

und es kehren ganz dieselben Fälle wieder wie bei A (Seite 6 oben), und man hat $y_2 = i^\nu y_1$, $\nu \not\equiv 0 \bmod 4$. $y_2 = y_1$ geht nicht neben $x_2 = x_1$, weil das immer denselben Punkt gäbe. $y_2 = i^2 y_1$ geht auch nicht, weil man damit eine Untergruppe von zwei Punkten hätte. $y_2 = i^3 y_1$ läßt sich ähnlich wie oben (Seite 6) auf $y_2 = iy_1$ reduzieren. Man hat also

$$x_2 = x_1 \quad \text{und} \quad y_2 = iy_1.$$

β) $x_2 = ix_1$.

Es sei $B(x_1) = (x_1 - a)^p (x_1 - ia)^q (x_1 - i^2 a)^r (x_1 - i^3 a)^s C(x_1)$, wo $C(x_1)$ für $x_1 = a, ia, i^2 a, i^3 a$ weder Null noch unendlich wird. $BB'B''B''' = 1$ wird dann:

$$\begin{aligned}
&(x_1 - a)^p (x_1 - ia)^q (x_1 - i^2 a)^r (x_1 - i^3 a)^s \cdot C \\
&\times (ix_1 - a)^p (ix_1 - ia)^q (ix_1 - i^2 a)^r (ix_1 - i^3 a)^s \cdot C' \\
&\times (i^2 x_1 - a)^p (i^2 x_1 - ia)^q (i^2 x_1 - i^2 a)^r (i^2 x_1 - i^3 a)^s \cdot C'' \\
&\times (i^3 x_1 - a)^p (i^3 x_1 - ia)^q (i^3 x_1 - i^2 a)^r (i^3 x_1 - i^3 a)^s \cdot C''' \\
&= (x_1 - a)^{p+q+r+s} \cdot i^{q+2r+3s} \cdot (x_1 - ia)^{p+q+r+s} \cdot i^{r+2s+3p} \\
&\times (x_1 - i^2 a)^{r+s+p+q} \cdot i^{s+2p+3q} \\
&\times (x_1 - i^3 a)^{p+q+r+s} \cdot i^{p+2q+3r} \cdot CC'C''C''' = 1
\end{aligned}$$

oder mit Fortlassung der Potenzen von i

$$(x^4 - a^4)^{p+q+r+s} \cdot CC'C''C''' = 1.$$

Aus der Art, wie C gewählt ist, folgt: $p + q + r + s = 0$. Nimmt man also $s = -p - q - r$, so ergibt sich:

$$B(x) = (x_1 - a)^p (i^3 x_1 - a)^q (i^2 x_1 - a)^r (i x_1 - a)^{-p-q-r} C$$

oder, indem man den Faktor $(i^2 x_1 - a)^{-q}$ im Zähler und Nenner beifügt:

$$B(x_1) = \frac{(x_1 - a)^p \cdot (i x_1 - a)^{-r-q} \cdot (i^2 x_1 - a)^{-q}}{(i x_1 - a)^p \cdot (i^2 x_1 - a)^{-r-q} \cdot (i^3 x_1 - a)^{-q}} C(x_1).$$

Ebenso kann man jetzt $C(x_1)$ zerlegen und findet schließlich:

$$B(x_1) = \frac{D(x_1) \cdot E(i x_1) \cdot F(i^2 x_1)}{D(i x_1) \cdot E(i^2 x_1) \cdot F(i^3 x_1)} k,$$

wo D, E, F ganze rationale Funktionen sind und k eine vierte Einheitswurzel bedeutet. Man hat demnach folgende Transformation:

$$x_2 = i x_1, \quad y_2 = \frac{D(x_1)\, E(i x_1)\, F(i^2 x_1)}{D(i x_1)\, E(i^2 x_1)\, F(i^3 x_1)} i^\nu y_1 + A.$$

Setzt man nun:

$$y_1 = \frac{v_1}{D(x_1)\, E(i x_1)\, F(i^2 x_1)} \quad \text{und} \quad y_2 = \frac{v_2}{D(i x_1)\, E(i^2 x_1)\, F(i^3 x_1)},$$

so folgt:

$$v_2 = G(x_1) + i^\nu v_1,$$

wo $G(x_1)$ eine ganze rationale Funktion von x_1 ist, da nach Gleichung (2) Seite 8 A durch B teilbar ist. Macht man jetzt die umkehrbare Substitution:

$$v_1 = x_1^\nu w_1 \quad \text{und} \quad v_2 = x_2^\nu w_2 = i^\nu x_1 w_2, \text{ so folgt:}$$

$$w_2 = G_1(x_1) + w_1,$$

wo G_1 eine ganze rationale Funktion ist. Bezeichnet man in vorstehender Gleichung die Ersetzung von x_1 durch $i x_1$ mit einem Akzent, so erhält man:

$$w_2' = G_1' + w_1' = G_1' + G_1 + w_1.$$

Da nun aber eine viermalige Anwendung der Transformation wieder den ersten Punkt ergeben soll, so muß sein:

$$G_1(x_1) + G_1(i x_1) + G_1(i^2 x_1) + G_1(i^3 x_1) = 0.$$

Zerlegt man G_1 in die Summe:

$$H(x_1^4) + x_1 K(x_1^4) + x_1^2 M(x_1^4) + x_1^3 N(x_1^4),$$

so folgt $H(x_1^4) = 0$ auf folgende Weise:

$$\begin{aligned} G_1(x_1) &= H + x_1 K + x_1^2 M + x_1^3 N, \\ G_1(ix_1) &= H + ix_1 K + i^2 x_1^2 M + i^3 x_1 N, \\ G_1(i^2 x_1) &= H + i^2 x_1 K + x_1^2 M + i^2 x_1 N, \\ G_1(i^3 x_1) &= H + i^3 x_1 K + i^2 x_1 M + ix_1 N. \end{aligned}$$

Durch Addition der vier Gleichungen folgt:

$$0 = 4H.$$

Demnach ist die Transformation gegeben durch:

$$x_2 = ix_1, \quad y_2 = y_1 + x_1 K(x_1^4) + x_1^2 M(x_1^4) + x_1^3 N(x_1^4),$$

wenn man wieder y für v schreibt. Setzt man nun:

$$y_1 = v_1 + \frac{x_1 K}{i-1} + \frac{x_1^2 M}{i^2-1} + \frac{x_1^3 N}{i^3-1} = v_1 - \frac{x_1 K}{1-i} - \frac{x_1^2 M}{2} - \frac{x^3 N}{1+i},$$

$$y_2 = v_2 + \frac{ix_1 K}{i-1} + \frac{i^2 x_1 M}{i^2-1} + \frac{i^3 x_1^3 N}{i^3-1} = v_2 - \frac{ix_1 K}{1-i} + \frac{x_1^2 M}{2} + \frac{ix_3 N}{1+i},$$

so folgt:

$$x_2 = ix_1, \quad v_2 = v_1 \text{ oder } y_2 = y_1 \quad \text{oder mit Vertauschung}$$
$$\text{der Variabeln: } x_2 = x_1, \quad y_2 = iy_1.$$

γ) $x_2 = i^2 x_1 = -x_1$.

Da in diesem Falle $B'' = B$ und $B''' = B'$, $A'' = A$ und $A''' = A'$ ist, so lauten die Gleichungen für A und B:

$$B^2 B'^2 = 1 \quad \text{und} \quad A' + AB' + A'BB' + ABB'^2 = 0.$$

1. Wenn $BB' = +1$ ist, so wird die zweite Gleichung:

$$A'B + A = 0.$$

Dann wird aber schon $y_3 = y_1$, und man hat also eine Gruppe von nur zwei Punkten.

2. Wenn $BB' = -1$ ist, so kann man ein ganz analoges Verfahren einschlagen, wie unter β) und erhält $y_2 = A \pm \frac{D(x_1)}{D(-x_1)} iy_1$. Man kann es aber auch einfacher auf folgende Art erhalten. Lüroth hat in der genannten Schrift (Seite 10) gezeigt, daß $B(x_1)$ gleich $\frac{D(x_1)}{D(-x_1)}$ sein muß, wenn $BB' = +1$ sein soll. Soll es also -1 werden, so muß zu B noch ein Faktor c kommen, so daß $c^2 = -1$, also $c = \pm i$ ist. Also hat man:

$$x_2 = -x_1 \quad \text{und} \quad y_2 = A \pm \frac{D(x_1)}{D(-x_1)} i y_1, \quad \text{was durch}$$

$$y_1 = v_1 : D(x_1) \quad \text{und} \quad y_2 = v_2 : D(-x_1) \quad \text{auf}$$

$$x_2 = -x_1 \quad \text{und} \quad v_2 = R(x_1) \pm i v_1$$

reduziert wird. Hier wird $v_5 = v_1$ bei ganz beliebigem $R(x_1)$. Nimmt man nun bei iv_1 zunächst das positive Zeichen und setzt:

$$v_1 = y_1 + \frac{iR}{2} + \frac{R'}{2}, \quad v_2 = y_2 + \frac{iR'}{2} + \frac{R}{2}, \quad \text{so folgt:}$$

$$y_2 = i y_1.$$

Nimmt man aber $-iv_1$ und setzt $v_1 = y_1 - \frac{iR}{2} + \frac{R'}{2}$ und $v_2 = y_2 - \frac{iR'}{2} + \frac{R}{2}$, so erhält man $y_2 = -iy_1$, was (Seite 6 oben) schon auf die Form $w_2 = iw_1$ gebracht wurde.

Setzt man endlich noch $x_1 = u_1 w_1^2$, $x_2 = u_2 i^2 w_1$, so ist $u_2 = u_1$ neben $w_2 = iw_1$ oder mit x und y geschrieben:

$$x_2 = x_1, \quad y_2 = i y_1.$$

$$\text{B:} \quad y_2 = \frac{A + By_1}{y_1}.$$

Die nötigen Gleichungen zur Bestimmung von A und B erhält man wieder, wenn man y_5 bildet und gleich y_1 setzt.

$$y_3 = \frac{AB' + (A' + BB')y_1}{A + By_1},$$

$$y_4 = \frac{A(A'' + B'B'') + (A'B'' + A''B + BB'B'')y_1}{AB' + (A' + BB')y_1},$$

$$y_5 = y_1 = \frac{A(A''B''' + A'''B' + B'B''B''')}{A(A'' + B'B'') + (A'B'' + A''B + BB'B'')y_1}$$
$$+ \frac{[A'(A''' + B''B''') + B(A''B''' + A'''B' + B'B''B''')]y_1}{A(A'' + B'B'') + (A'B'' + A''B + BB'B'')y_1}.$$

Denkt man sich nun den Nenner auf die linke Seite der Gleichung gebracht, so muß der Koeffizient von y_1^2 Null sein. Damit ist aber auch das absolute Glied des Zählers Null. Es bleibt also zur Bestimmung von A und B, da $A \neq 0$ ist:

(1) $$A'B'' + A''B + BB'B'' = 0,$$

(2) $$AA'' - A'A''' = A'B''B''' - AB'B''.$$

$$\alpha) \quad x_2 = x_1.$$

In diesem Falle ist die zweite Gleichung identisch für beliebige A und B, die erste wird:

$$B(2A + B^2) = 0.$$

$B = 0$ liefert eine Gruppe von nur zwei Punkten, also hat man $A = -\frac{1}{2}B^2$, wo B eine ganz beliebige rat. Funktion ist. Man hat also:

$$x_2 = x_1, \quad y_2 = B - \frac{B^2}{2y_1},$$

was ganz analog wie die Transformation für x_2 (Seite 7 Mitte) reduziert wird auf:

$$y_2 = iy_1.$$

$$\beta) \quad x_2 = ix_1.$$

Ersetzt man in der zweiten Bestimmungsgleichung für A und B x_1 durch ix_1, so folgt, da $B'''' = B$ und $A'''' = A$:

$$A'A''' - A''A = A''B'''B - A'B''B'''.$$

Addiert man diese neue Gleichung zur zweiten, so folgt:

$$0 = A''B'''B - AB'B'',$$

also muß $A = \varrho BB'''$ sein. Der Faktor ϱ, der sich mit x nicht ändert, läßt sich mit Hilfe der ersten Gleichung bestimmen:

$$\varrho B'BB'' + \varrho B''B'B + BB'B'' = 0, \text{ also ist}$$

$$\varrho = -\tfrac{1}{2}.$$

Die Transformation ist somit gegeben durch:

$$x_2 = ix_1, \quad y_2 = B - \frac{BB'''}{2y_1}.$$

Setzt man nun $y_1 = v_1 B'''$, also $y_2 = v_2 B$, so ist:

$$x_2 = ix_1, \quad v_2 = 1 - \frac{1}{2v_1},$$

was schon auf die Form $y_2 = iy_1$ reduziert ist (Seite 7 Mitte). Setzt man noch $x_1 = u_1 y_1$ und $x_2 = u_2 iy_1$, so folgt:

$u_2 = u_1$ oder wieder mit x und y geschrieben:

$$x_2 = x_1, \quad y_2 = iy_1.$$

Es war in dieser Transformation $A = -\frac{1}{2}BB'''$. Da nun A nicht Null sein darf, wohl aber B, so ist noch der Fall $B = 0$ zu untersuchen. Es bleibt von den Gleichungen für A und B nur

$$AA'' = A'A'''.$$

Hieraus folgt $A' = \varrho A$, wo ϱ mit x_1 sich nicht ändert. Da $\varrho^2 = 1$ sein muß, so hat man:

$$A' = + A \quad \text{oder} \quad A' = - A.$$

1. Wenn A bei der Transformation sich nicht ändern soll, so muß $A = f(x_1^4)$ sein, was man mit Hilfe der Wurzeln, a_i^4, der Gleichung $f(x_1^4) = 0$ in der Form

$$A = k^2 \Pi (x_1^4 - a_i^4)^{\nu_i} = \pm k^2 \Pi \{(a_i^2 - x_1^2)^{\nu_i} (a_i^2 + x_1^2)^{\nu_i}\}$$

darstellen kann, wo ν_i ganze positive Zahlen sind. Die Transformation lautet also

$$x_2 = i x_1, \quad y_2 = \pm k^2 \Pi \{(a_i^2 - x_1^2)^{\nu_i} (a_i^2 + x_1^2)^{\nu_i}\} : y_1.$$

Setzt man nun $y_1 = v_1 k \Pi (a_i^2 + x_1^2)^{\nu_i}$ und $y_2 = v_2 k \Pi (a_i^2 - x_1^2)^{\nu_i}$, bei positivem Zeichen, und dieselbe Substitution, versehen mit dem Faktor i, bei negativem Zeichen, so ergibt sich:

$$x_2 = i x_1 \quad \text{und} \quad v_2 = 1 : v_1,$$

was Seite 7 (1) auf den Typus $y_2 = i^2 y_1$ reduziert wurde.

2. Wenn $A' = - A$ also $A'' = + A$ sein soll, so hat man:

$$A = x_1^2 f(x_1^4) = \pm k^2 x_1^2 \Pi \{(a_i^2 - x_1^2)^{\nu_i} (a_i^2 + x_1^2)^{\nu_i}\}$$

und damit die Transformation

$$x_2 = i x_1 \quad \text{und} \quad y_2 = \pm k_2 x_1^2 \Pi \{(a_i^2 - x_1^2)^{\nu_i} (a_i^2 + x_1^2)\} : y_1.$$

Setzt man nun beim negativen Zeichen $y_1 = k x_1 v_1 \Pi (a_i^2 + x_1^2)^{\nu_i}$, also $y_2 = i k x_1 v_2 \Pi (a_i^2 - x_1^2)^{\nu_i}$, und beim positiven Zeichen dasselbe versehen mit dem Faktor i im Zähler, so folgt:

$$v_2 = \frac{i}{v_1}, \quad \text{was durch} \quad v_1 = \frac{1+i}{\sqrt{2}} y_1 \quad \text{und} \quad v_2 = \frac{1+i}{\sqrt{2}} y_2$$

auf die schon wiederholt behandelte Form $y_2 = 1 : y_1$ reduziert wird.

$$\gamma) \quad x_2 = - x_1.$$

Da hierbei $A'' = A$, $A''' = A'$, $B'' = B$, $B''' = B'$ ist, so sind die Bestimmungsgleichungen für A und B:

$$A'B + AB + B^2 B' = B(A + A' + BB') = 0,$$
$$A^2 - A'^2 = A'BB' - ABB'.$$

1. Wenn $B = 0$ ist, dann ist $A' = - A$ ($+ A$ würde eine Gruppe von nur zwei Punkten ergeben).

Da nun A eine beliebige ungerade rationale Funktion ist, so kann man setzen: $A = x_1 f(x_1^2) = x_1 k^2 \Pi (x_1^2 - a_i^2)^{\nu_i} = \pm x_1 k^2 \Pi \{(a_i + x_1)^{\nu_i} (a_i - x_1)^{\nu_i}\}$, so daß die Transformation ist:

$$x_2 = -x_1, \quad y_2 = \pm x_1 k^2 \Pi \{(a_i + x_1)^{\nu_i}(a_i - x_1)^{\nu_i}\} : y_1,$$

wo ν_i ganze positive oder negative Zahlen sind.

Setzt man nun bei positivem Zeichen:

$$y_1 = v_1 k \Pi (a_i + x_1)^{\nu_i}, \quad y_2 = v_2 k \Pi (a_i - x_1)^{\nu_i}$$

und bei negativem Zeichen dasselbe mit Zufügung des Faktors i, so ist $x_2 = -x_1$, $v_2 = x_1 : v_1$. Setzt man nun

$$x_1 = u_1 v_1^2 \quad \text{und} \quad x_2 = u_2 v_2^2,$$

so ist $u_2 v_2^2 = -u_1 v_1^2$ und $v_2 = u_1 v_1$ oder $u_2 = -\frac{1}{u_1}$ und $v_2 = u_1 v_1$. Setzt man noch

$$u_1 = \frac{i(1+x_1)}{1-x_1}, \quad \text{also} \quad u_2 = \frac{i(1-x_1)}{1+x_1},$$

so folgt:

$$x_2 = i^2 x_1 \quad \text{und} \quad v_2 = \frac{i(1+x_1)v_1}{1-x_1},$$

was ein spezieller Fall der auf Seite 10 unter γ) behandelten Transformation ist.

2. Wenn $B \neq 0$ ist, so hat man ganz analog dem Falle unter β) $A = -\frac{1}{2} BB'$ und die Transformation lautet:

$$x_2 = -x_1, \quad y_2 = B - \frac{BB'}{2y_1},$$

was durch $y_1 = v_1 B'$, also $y_2 = v_2 B$, sich reduziert auf:

$$v_2 = 1 - \frac{1}{2v_1},$$

eine schon wiederholt behandelte Form.

Zweites Kapitel.

Wenn ein Linienbüschel in ein anderes übergehen soll, so kann man die Koordinaten so bestimmen, daß x_2 nur von y_1 abhängt, während im allgemeinen y_2 Funktion von x_1 und y_1 ist. Also

$$x_2 = f(y_1), \quad y_2 = g(x_1 y_1).$$

Da die Transformation eindeutig umkehrbar sein soll, so muß $f(y_1)$ in y_1 linear sein. Setzt man daher $f(y_1) = z_1$, also $f(y_2) = z_2$, so wird z_2 eine rationale Funktion von x_1 und z_1, so daß man nur

$$x_2 = y_1 \quad \text{und} \quad y_2 = g_1(x_1 y_1)$$

zu behandeln hat, wo statt z wieder y geschrieben ist. Wäre nun y_2 nur von y_1 abhängig, also $y_2 = g(y_1)$, so würde folgen:

$y_4 = x_1 = g\{g[g(y_1)]\}$, was nicht möglich ist, da x_1 und y_1 dann nicht unabhängig voneinander wären.

Dagegen kann y_2 von y_1 unabhängig sein. Denn aus $y_2 = g(x_1)$ ergibt sich $y_4 = x_1 = g\{g(x_1)\}$, was möglich ist. Da nun wegen der eindeutigen Umkehrbarkeit g in x_1 linear sein muß, so hat man

$$\text{(I)} \qquad x_2 = y_1 \quad \text{und} \quad y_2 = \frac{A(y_1) + x_1 B(y_1)}{C(y_1) + x_1 D(y_1)}.$$

Da $x_4 = y_3$ und $y_4 = x_1$ sein muß, so erhält man

$$x_4 = \frac{A(y_2) + y_1 B(y_2)}{C(y_2) + y_1 D(y_2)}.$$

Dieser Ausdruck muß wegen der eindeutigen Umkehrbarkeit in y_1 linear sein. Man hat also, wenn α, β, γ, δ ganze rationale Funktionen von x_1 bedeuten, identisch:

$$\frac{A(y_2) + y_1 B(y_2)}{C(y_2) + y_1 D(y_2)} = \frac{\alpha + y_1 \beta}{\gamma + y_1 \delta} \quad \text{oder}$$

$$\text{(II)} \quad y_1^2(\delta B - \beta D) + y_1\{\delta A - \alpha D + \gamma B - \beta C\} + \gamma A - \alpha C = 0.$$

Nimmt man jetzt ein Wertesystem y_2, x_1 beliebig an und bestimmt aus (I) die dazu gehörigen Werte von y_1, so müssen dieselben auch die Gleichung (II) erfüllen. Wenn also die Koeffizienten von (II) nicht alle identisch Null sind, so dürfen sich aus (I) nur zwei Werte für y_1 ergeben. Also können die Funktionen A, B, C, D höchstens vom zweiten Grade sein. Weitere Untersuchungen machten es höchst wahrscheinlich, daß dieselben nur vom ersten Grade sein können. Ich beschränke mich im folgenden auf den Fall, daß diese Funktionen linear sind. Der stringente Beweis, daß sie es sein müssen, ist mir noch nicht gelungen.

Es bleibt noch der Fall zu untersuchen, daß die Koeffizienten von (II) alle identisch Null sind. Man hat dann

$$\frac{\delta}{\beta} = \frac{D}{B} = k_1.$$

Die beiden Seiten müssen konstant sein, weil die eine nur von x_1, die andere nur von y_2 abhängt, ebenso ist $\frac{\gamma}{\alpha} = \frac{C}{A} = k_3$. Setzt man die sich hieraus für δ, D, γ, C ergebenden Werte in die Gleichung $\delta A - \alpha D + \gamma B - \beta C = 0$ ein, so ergibt sich $\frac{A}{B} = \frac{\alpha}{\beta} = k_2$. Es wäre demnach $A = k_2 B$, $C = k_2 k_3 B$, $D = k_1 B$, und die Transformation würde lauten:

$$y_2 = \frac{k_2 + x_1}{k_2 k_3 + k_1 x_1},$$

ein Fall, der sofort erledigt werden soll.

Wenn nämlich Zähler und Nenner einen gemeinsamen Faktor haben, so ist derselbe entweder eine lineare Funktion von x_1 oder von y_1. Durch Kürzen mit demselben würde sich im ersten Falle ergeben, daß y_2 von x_1 unabhängig ist, was nicht geht, im zweiten Falle, daß y_2 nur Funktion von x_1 ist, was möglich ist. Man hat dann

$$x_2 = y_1, \quad y_2 = \frac{a x_1 + b}{c x_1 + d},$$

wo die Konstanten a, b, c, d durch die Gleichung $y_4 = x_1$ zu bestimmen sind.

$$y_3 = \frac{a y_1 + b}{c y_1 + d}, \quad y_4 = x_1 = \frac{(a^2 + bc) x_1 + (bd + ab)}{(ac + cd) x_1 + (cb + d^2)}.$$

Wenn nun $c = 0$ ist, dann hat man eine ganze lineare Funktion von x_1 und es muß $a^2 : d^2 = 1$ und $b(a + d) = 0$ sein. Ist $b = 0$ und $a = \pm d$, so ist $y_2 = \pm x_1$. Das positive Zeichen ist aber nicht zu gebrauchen, weil man so eine Gruppe von nur zwei Punkten erhalten würde.

Ist $b \neq 0$, also $d = -a$, so ist die Transformation:

$$y_2 = -x_1 + b:$$

Wenn aber $c \neq 0$ ist, dann liefert der Koeffizient von x_1^2 gleich Null gesetzt $d = -a$, während b und c beliebig sind; also hat man

$$x_2 = y_1, \quad y_2 = \frac{a x_1 + b}{c x_1 - a}.$$

Für die weiteren Untersuchungen sollen nun folgende Bezeichnungen gebraucht werden:

$$A(x_1) = \alpha_1 x_1 + \alpha_2, \quad B(x_1) = \beta_1 x_1 + \beta_2 \quad \text{usw.}$$

$$\text{und:} \quad A(x_1) + y B(x_1) = Z, \quad C(x_1) + y D(x_1) = N.$$

Man hat nun wieder y_4 zu bilden und es gleich x_1 zu setzen.

$$y_3 = \frac{N \cdot A(y_1) + Z \cdot B(y_1)}{N \cdot C(y_1) + Z \cdot D(y_1)} \quad \text{und}$$

$$y_4 = x_1 = \frac{\left\{C(y_1) + \frac{Z}{N} D(y_1)\right\}\left(\alpha_1 \frac{Z}{N} + \alpha_2\right) + \left\{A(y_1) + \frac{Z}{N} B(y_1)\right\}\left(\beta_1 \frac{Z}{N} + \beta_2\right)}{\left\{C(y_1) + \frac{Z}{N} D(y_1)\right\}\left(\gamma_1 \frac{Z}{N} + \gamma_2\right) + \left\{A(y_1) + \frac{Z}{N} B(y_1)\right\}\left(\delta_1 \frac{Z}{N} + \delta_2\right)}$$

oder indem man mit N erweitert und die einzelnen Glieder etwas anders zusammenfaßt:

$$N^2\{(\beta_2-\delta_2 x_1)A(y_1)-(\gamma_2 x_1-\alpha_2)C(y_1)\}$$
$$+Z^2\{(\beta_1-\delta_1 x_1)B(y_1)-(\gamma_1 x_1-\alpha_1)D(y_1)\}$$
$$+N\cdot Z\{(\beta_1-\delta_1 x_1)A(y_1)+(\beta_2-\delta_2 x_1)B(y_1)+(\alpha_1-\gamma_1 x_1)C(y_1)$$
$$+(\alpha_2-\gamma_2 x_1)D(y_1)\}=0.$$

Da Z und N nicht zugleich Null werden dürfen, so folgt:

$$(\beta_2-\delta_2 x_1)A(y_1)+(\alpha_2-\gamma_2 x_1)C(y_1)=\nu[A(x_1)+y_1 B(x_1)] \quad \text{und}$$
$$(\beta_1-\delta_1 x_1)B(y_1)+(\alpha_1-\gamma_1 x_1)D(y_1)=\lambda[C(x_1)+y_1 B(x_1)] \quad \text{und}$$
$$\nu N+(\beta_1-\delta_1 x_1)A(y_1)+(\beta_2-\delta_2 x_1)B(y_1)+(\alpha_1-\gamma_1 x_1)C(y_1)$$
$$+(\alpha_2-\gamma_2 x_1)D(y_1)+\lambda Z=0,$$

wo ν und λ zwei konstante Größen sind. Da nun diese Gleichungen identisch gelten müssen für alle $x_1 y_1$, so hat man zur Bestimmung der α, β, γ, δ folgende Gleichungen:

$$(1)\quad \beta_1^2+\alpha_1\delta_1-\lambda\delta_2=0, \qquad (5)\quad \alpha_1\delta_2+\gamma_1\gamma_2+\nu\beta_1=0,$$
$$(2)\quad \beta_1\beta_2+\alpha_1\delta_2-\lambda\gamma_2=0, \qquad (6)\quad \alpha_2\delta_2+\gamma_2^2+\nu\alpha_1=0,$$
$$(3)\quad \delta_1(\beta_1+\gamma_1+\lambda)=0, \qquad (7)\quad \gamma_1\alpha_2+\beta_2(\alpha_1-\nu)=0,$$
$$(4)\quad \delta_1\beta_2+\gamma_1(\delta_2+\lambda)=0, \qquad (8)\quad \alpha_2(\beta_2+\gamma_2-\nu)=0,$$
$$(9)\quad \delta_1(\nu-\alpha_1-\gamma_2)-\beta_1(\delta_2-\lambda)-\gamma_1^2=0,$$
$$(10)\quad \gamma_1(\nu-\gamma_2)-\delta_2(\beta_2+\gamma_2)-\alpha_2\delta_1+\lambda\alpha_1=0,$$
$$(11)\quad \nu\delta_2+\beta_1(\alpha_1+\beta_2)+\alpha_1\gamma_1+\alpha_2\delta_1+\lambda\beta_2=0,$$
$$(12)\quad \alpha_2(\delta_2+\beta_1+\lambda)+\gamma_2(\nu+\alpha_1)+\beta_2^2=0.$$

Mit Rücksicht auf (3) und (8) hat man:

§ 1. $\delta_1=0$ und $\alpha_2=0$, § 3. $\delta_1\neq 0$ und $\alpha_2=0$,
§ 2. $\delta_1=0$ und $\alpha_2\neq 0$, § 4. $\delta_1\neq 0$ und $\alpha_2\neq 0$.

§ 1.

Nimmt man zunächst an, daß $\delta_1=0$ und $\alpha_2=0$ ist, so hat man mit Rücksicht auf (4) und (7) folgende Fälle:

(I) $\gamma_1=0$ und $\beta_2=0$, (III) $\delta_2=-\lambda$ und $\beta_2=0$,
(II) $\gamma_1=0$ und $\nu=\alpha_1$, (IV) $\delta_2=-\lambda$ und $\nu=\alpha_1$.

I.

Wenn außer δ_1 und α_2 auch noch γ_1 und β_2 Null ist, so bleiben folgende Gleichungen übrig:

(1) $\beta_1^2 - \lambda\delta_2 = 0,$	(5) $\alpha_1\delta_2 + \nu\beta_1 = 0,$	(9) $\beta_1(\delta_2 - \lambda) = 0,$
(2) $\alpha_1\delta_2 - \lambda\gamma_2 = 0,$	(6) $\gamma_2^2 + \nu\alpha_1 = 0,$	(10) $-\delta_2\gamma_2 + \lambda\alpha_1 = 0,$

(11) $\nu\delta_2 + \alpha_1\beta_1 = 0,$ (12) $\gamma_2(\nu + \alpha_1) = 0.$

Mit Rücksicht auf (9) und (12) hat man nun wieder vier Fälle:

1. $\gamma_2 = 0$ und $\beta_1 = 0$. Dann müßte nach (2) $\alpha_1 = 0$ sein, und man hätte $y_2 = 0$, oder $\delta_2 = 0$, und man hätte $y_2 = \infty$.

2. $\gamma_2 = 0$ und $\lambda = \delta_2$. Dann wäre nach (2) $\alpha_1 = 0$, und y_2 wäre nur von x_1 abhängig, was schon erledigt ist.

3. $\gamma_2 \neq 0$ und $\beta_1 = 0$. Dann wäre nach (1) $\delta_2 = 0$ und y_2 nur $f(x_1)$ oder (1) $\lambda = 0$, dann wäre nach (2) $\alpha_1 = 0$ und $y_2 = 0$.

4. $\gamma_2 \neq 0$, $\nu = -\alpha_1$ und $\lambda = \delta_2$. Dann ist nach (2) $\alpha_1 = \gamma_2$ und nach (11) $\beta_1 = \delta_2$, und man hat $y_2 = x_1 \dfrac{\gamma_2 + \delta_2 y_1}{\gamma_2 + \delta_2 y_1}$, was schon da war. Fall (I) liefert also nichts Neues.

II.

Wenn man neben $\delta_1 = 0$ und $\alpha_2 = 0$ nach § 1 (II) $\gamma_1 = 0$ und $\nu = \alpha_1$ annimmt, so bleiben folgende Gleichungen:

(1) $\beta_1^2 - \lambda\delta_2 = 0,$	(5) $\alpha_1(\delta_2 + \beta_1) = 0,$	(9) $\beta_1(\delta_2 - \lambda) = 0,$
(2) $\beta_1\beta_2 + \alpha_1\delta_2 - \lambda\gamma_2 = 0,$	(6) $\gamma_2^2 + \alpha_1^2 = 0,$	(10) $-\delta_2(\beta_2 + \gamma_2) + \lambda\alpha_1 = 0,$

(11) $\beta_1\beta_2 + \lambda\beta_2 = 0$ mit Rücksicht auf (5), (12) $2\alpha_1\gamma_2 + \beta_2^2 = 0.$

Die Gleichungen (9) und (11) ergeben:

1. $\beta_1 = 0$ und $\beta_2 = 0$; dann wäre nach (1) $\delta_2 = 0$ und $y_2 = f(x_1)$, oder $\lambda = 0$, dann wäre nach (2) $\alpha_1 = 0$ und $y_2 = 0$.

2. $\beta_1 = 0$ und $\lambda = -\beta_1 = 0$; dann müßte nach (2) $\delta_2 = 0$ sein [$\alpha_1 = 0$ geht nicht wegen (6) und (12)]. Aus Gleichung (6) und (12) folgt nun:

$$\gamma_2 = \pm i\alpha_1 \quad \text{und} \quad \beta_2^2 = \mp 2i\alpha_1^2, \quad \text{also}$$
$$\gamma_2 = +i\alpha_1 \quad \text{und} \quad \beta_2 = \pm i\sqrt{2i}\cdot\alpha_1 \quad \text{oder}$$
$$\gamma_2 = -i\alpha_1 \quad \text{und} \quad \beta_2 = \pm\sqrt{2i}\cdot\alpha_1.$$

Damit sind alle Gleichungen erfüllt. Da $\sqrt{2i} = 1 + i$ ist, hat man folgende Transformation:

$$x_2 = y_1, \quad y_2 = \frac{\alpha_1 x_1 \pm i(1+i)\alpha_1 y_1}{i\alpha_1} = -ix_1 \pm (1+i) y_1$$

oder $$x_2 = y_1, \quad y_2 = \frac{\alpha_1 x_1 \pm (1+i)\alpha_1 y_1}{-i\alpha_1} = ix_1 \pm (1-i) y_1.$$

3. $\lambda = \delta_2$ und $\beta_2 = 0$; dann ist nach (2) $\gamma_2 = \alpha_1$ [da $\delta_2 \neq 0$ sein muß wegen (1) usw.], nach (6) $\alpha_1 = 0$, also $\gamma_2 = 0$. Es wäre also $A(x) = 0$ und $C(x) = 0$ und y_2 nur $f(x_1)$.

4. $\lambda = \delta_2$ und $\lambda = -\beta_1$; also ist $\beta_1 = -\delta_2$ und (6) $\gamma_2 = \pm i\alpha_1$.

Wenn $\gamma_2 = +i\alpha_1$ ist, dann liefert (12) $\beta_2 = \pm(i-1)\alpha_1$, wo aber wegen (2) nur das negative Zeichen brauchbar ist.

Wenn $\gamma_2 = -i\alpha_1$ ist, dann liefert (12) $\beta_2 = \pm(1+i)\alpha_1$, wo aber wegen (2) nur das positive Zeichen genommen werden darf.

Man erhält also zwei Transformationen, welche sich aber nur dadurch unterscheiden, daß bei der einen i das entgegengesetzte Zeichen hat wie bei der anderen. Die eine davon ist

$$x_2 = y_1, \quad y_2 = \frac{\alpha_1 x + (1-i)\alpha_1 y_1 - \delta_2 x_1 y_1}{i\alpha_1 + \delta_2 y_1} = \frac{a x_1 + (1-i) a y_1 - x_1 y_1}{ia + y_1},$$

wo $a = \alpha_1 : \delta_2$ ist; denn bei $\delta_2 = 0$ hat man die vorhergehende Transformation.

III.

Wenn außer $\delta_1 = 0$ und $\alpha_2 = 0$ auch $\lambda = -\delta_2$ und $\beta_2 = 0$ ist, so bleiben folgende Gleichungen:

(1) $\beta_1^2 + \delta_2^2 = 0$, (5) $\alpha_1\delta_2 + \gamma_1\gamma_2 + \nu\beta_1 = 0$, (9) $2\beta_1\delta_2 + \gamma_1^2 = 0$,
(2) $\delta_2(\alpha_1 + \gamma_2) = 0$, (6) $\gamma_2^2 + \nu\alpha_1 = 0$, (10) $\gamma_1(\nu - \gamma_2) - \delta_2\gamma_2 - \delta_2\alpha_1 = 0$,
(11) $\nu\delta_1 + \alpha_1\beta_1 + \alpha_1\gamma_1 = 0$, (12) $\gamma_2(\nu + \alpha_1) = 0$.

Aus (2) folgt: $\delta_2 = 0$ oder $\gamma_2 = -\alpha_1$. Wenn aber $\delta_2 = 0$ ist, dann folgt nach (1) $\beta_1 = 0$ und (9) $\gamma_1 = 0$, und es wäre $y_2 = -x_1$, was schon erledigt ist. Also muß sein: $\gamma_2 = -\alpha_1$. Damit wird (6) = (12) $\alpha_1(\alpha_1 + \nu)$. Wenn nun:

1. $\alpha_1 = 0 = \gamma_2$ ist, dann folgt aus (6) $\nu = 0$. Es sind nun nur noch die beiden Gleichungen zu erfüllen:

$$(1) \quad \beta_1^2 + \delta_2^2 = 0, \qquad (9) \quad \gamma_1^2 + 2\beta_1\delta_2 = 0.$$

Nimmt man $\beta_1 = +i\delta_2$, dann ist $\gamma_1 = \mp(1-i)\delta_2$. Nimmt

man $\beta_1 = - i\delta_2$, dann ist $\gamma_1 = \pm (1+i)\,\delta_2$. Man hat dann folgende Transformation:

$$x_2 = y_1,\quad y_2 = \frac{i x_1 y_1}{\pm(1-i)x_1 + y_1} \quad \text{oder} \quad y_2 = \frac{-i x_1 y_1}{\pm(1+i)x_1 + y_1}.$$

2. Wenn aber $\nu = -\alpha_1$ ist, so bleibt außer den Gleichungen (1) und (9) nur noch (5), welche erfüllt ist, wenn man aus (1) und (9) folgende Wertepaare bestimmt (NB. $\gamma_2 = -\alpha_1$):

(1) $\beta_1 = +i\delta_2$, (9) $\gamma_1 = +(1-i)\,\delta_2$ oder

(1) $\beta_1 = -i\delta_2$, (9) $\gamma_1 = +(1+i)\,\delta_2$. Man hat also:

$$x_2 = y_1,\quad y_2 = \frac{\alpha_1 x_1 + i\delta_2 x_1 y_1}{-\alpha_1 + (1-i)\,\delta_2 x_1 + \delta_2 y_1} = \frac{a x_1 + i x_1 y_1}{-a + (1-i)\,x_1 + y_1},$$

wo $a = \alpha_1 : \delta_2$ gesetzt ist, da $\delta_2 = 0$ auf eine schon behandelte Form führt.

Das Vorzeichen von i ist auch hier, wie in den noch folgenden Transformationen, vertauschbar mit dem entgegengesetzten.

IV.

Wenn endlich bei $\delta_1 = 0$ und $\alpha_2 = 0$ $\lambda = -\delta_2$ und $\nu = \alpha_1$ ist, so erhält man aus

(1) $\beta_1 = \pm i\delta_2$, aus (6) $\gamma_2 = \pm i\alpha_1$, aus (9) $\gamma_1 = \pm(i)(1+i)\,\delta_2$ und aus (12) $\beta_2 = \pm(i)(1+i)\,\alpha_1$.

Es bleiben dann noch folgende Gleichungen zu erfüllen:

(2) $\beta_1\beta_2 + \delta_2(\alpha_1 + \gamma_2) = 0$, (10) $\gamma_1(\alpha_1 - \gamma_2) - \delta_2(\alpha_1 + \beta_2 + \gamma_2) = 0$,

(5) $\alpha_1\delta_2 + \gamma_1\gamma_2 + \alpha_1\beta_1 = 0$, (11) $\alpha_1\delta_2 + \alpha_1\beta_1 + \beta_1\beta_2 + \alpha_1\gamma_1 - \delta_2\beta_2 = 0$.

Nimmt man nun:

1.

$\beta_1 = +i\delta_2$ und $\gamma_2 = +i\alpha_1$, dann ist

$\beta_2 = \pm(i-1)\,\alpha_1$ und $\gamma_1 = \pm(i-1)\,\delta_2$,

womit aber (2) und (5) nur dann erfüllt sind, wenn man jeweils das positive Zeichen nimmt. Also hat man

$$x_2 = y_1,\quad y_2 = \frac{\alpha_1 x_1 - (1-i)\,\alpha_1 y_1 + i\delta_2 x_1 y_1}{i\alpha_1 - (1-i)\,\delta_2 x_1 + \delta_2 y_1} = \frac{a x_1 - (1-i)\,a y_1 + i x_1 y_1}{i a - (1-i)\,x_1 + y_1},$$

wo wieder $a = \alpha_1 : \delta_2$ ist, da $\delta_2 = 0$ eine schon behandelte Form ist.

2.

$\beta_1 = -i\delta_2$ und $\gamma_2 = -i\alpha_1$, dann ist

$\gamma_1 = -(1+i)\delta_2$ wegen (5) und $\beta_2 = -(1+i)$ wegen (2), und man hat wieder dieselbe Transformation wie unter 1., nur mit entgegengesetzten Zeichen von i.

3.

$\beta_1 = -i\delta_2$ und $\gamma_2 = +i\alpha_1$, dann ist

(9) $\gamma_1 = +(1+i)\delta_2$ wegen (5) und (12) $\beta_2 = +(1-i)\alpha_1$ wegen (2). Man hat dann folgende Transformation:

$$x_2 = y_1, \quad y_2 = \frac{\alpha_1 x_1 + (1-i)\alpha_1 y_1 - i\delta_2 x_1 y_1}{+i\alpha_1 + (1+i)\delta_2 x_1 + \delta_2 y_1} = \frac{a x_1 + (1-i) a y_1 - i x_1 y_1}{+ia + (1+i)x_1 + y_1}.$$

4.

$\beta_1 = +i\delta_2$ und $\gamma_2 = -i\alpha_1$, dann ist

(9) $\gamma_1 = +(1-i)\delta_2$ wegen (5) und (12) $\beta_2 = +(1+i)\alpha_1$ wegen (2). Also hat man dieselbe Transformation wie bei 3., nur mit Vertauschung des Vorzeichens von i.

§ 2.

Nimmt man zweitens an, daß $\delta_1 = 0$ und $\alpha_2 \neq 0$ ist, so hat man nach Gleichung (4) $\gamma_1(\delta_2 + \lambda) = 0$. Ist

a) $\gamma_1 = 0$ [oder a') $\lambda = -\delta_2$], so wird (9) $\beta_1(\lambda - \delta_2) = 0$.

b) Ist $\beta_1 = 0$ [oder b') $\lambda = \delta_2$], so wird (1) $\lambda\delta_2 = 0$. Also

c) $\lambda = 0$. Dann folgt aus (2) $\alpha_1 = 0$ und damit aus (10) $(\beta_2 + \gamma_2) = 0$. Wenn $\delta_2 = 0$ wäre, dann wäre nach (6) $\gamma_2 = 0$ und damit $y_2 = 0$. Also muß man $\beta_2 = -\gamma_2$ nehmen. Dann folgt aus (8) $\nu = 0$ und aus (6) $\delta_2 = -\gamma_2^2 : \alpha_2$, was aber keine Transformation ergibt.

c') $\delta_2 = 0$. In diesem Falle ist nach (2) $\lambda\gamma_2 = 0$; $\gamma_2 = 0$ geht nicht neben $\delta_1 = \delta_2 = \gamma_1 = 0$, also ist $\lambda = 0$. Dann ist (7) $\beta_2(\alpha_1 - \nu) = 0$.

d) Ist $\beta_2 = 0$, dann folgt, da $\gamma_2 \neq 0$, aus (12) $\nu = -\alpha_1$ und damit aus (6) und (8) $\gamma_2 = -\alpha_1$. Also hat man folgende Transformation:

$$x_2 = y_1, \quad y_2 = -x_1 - a.$$

d') Ist aber $\nu = +\alpha_1$, dann folgt aus (6) $\gamma_2 = \pm i\alpha_1$. Man hat nun noch die Gleichungen

$$(8)\ \beta_2 + \gamma_2 - \alpha_1 = 0 \quad \text{und} \quad (12)\ \beta_2^2 + 2\,\alpha_1\gamma_2 = 0.$$

Ist nun $\gamma_2 = + i\alpha_1$, so folgt aus (12) mit Rücksicht auf (8):

$$\beta_2 = + (1 - i)\,\alpha_1.$$

Ist aber $\gamma_2 = - i\alpha_1$, so folgt ebenso:

$$\beta_2 = + (1 + i)\,\alpha_1, \quad \text{also ist:}$$

$$x_2 = y_1, \quad y_2 = \frac{\alpha_2 + \alpha_1 x_1 + (1 - i)\,\alpha_1 y_1}{+ i\alpha_1} = - ia - ix_1 - (1 + iy_1).$$

b′) Ist $\lambda = \delta_2$, dann folgt aus (1) $\beta_1 = \pm\,\delta_2$ und aus (5) $\nu = \mp\,\alpha_1$, wo beidemal entweder das obere oder das untere Zeichen gilt.

I. $\beta_1 = + \delta_2$ und $\nu = - \alpha_1$; dann ist nach (11) $\beta_2 = 0$ und nach (12) $3 \cdot \alpha_2\delta_2 = 0$; $\delta_2 = 0$ würde auf d′) führen, $\alpha_2 = 0$ auf § 1.

II. $\beta_1 = - \delta_2$ und $\nu = + \alpha_1$. Es bleiben dann noch:

$$(6)\ \alpha_2\delta_2 + \gamma_2^2 + \alpha_1^2 = 0, \quad (10)\ \beta_2 = \alpha_1 - \gamma_2,$$

$$(12)\ 2\,\alpha_1\gamma_2 + \alpha_2\delta_2 + \beta_2^2 = 0.$$

Setzt man nun β_2 aus (10) in (12) ein, so wird es gleich (6); aus (6) folgt aber, da $\alpha_2 \neq 0$, $\delta_2 = - \dfrac{\alpha_1^2 + \gamma_2^2}{\alpha_2}$. Damit erhält man unter Anwendung folgender Abkürzungen $\dfrac{\gamma_2}{\alpha_2} = c$, $\dfrac{\alpha_1}{\alpha_2} = a$

$$x_2 = y_1, \quad y_2 = \frac{1 + ax_1 + (a - c)\,y_1 + (a^2 + c^2)\,x_1 y_1}{c - (a^2 + c^2)\,y_1}.$$

a′) Bei $\lambda = - \delta_2$ erhält man nach (1) und (2)

(I) $\qquad \beta_1 = + i\delta_2$ und $\beta_2 = + i\,(\alpha_1 + \gamma_2)$,

(II) $\qquad \beta_1 = - i\delta_2$ und $\beta_2 = - i\,(\alpha_1 + \gamma_2)$. Damit wird

(10) $\qquad \pm\, i\gamma_1\,(\alpha_1 + \gamma_2) = \delta_2\,\{\pm\, i\,(\alpha_1 + \gamma_2) + (\alpha_1 + \gamma_2)\}$.

Also hat man mit (I) $+ i\gamma_1 = (1 + i)\,\delta_2$ oder $\gamma_1 = + (1 - i)\,\delta_2$ und mit (II) $- i\gamma_1 = (1 - i)\,\delta_2$ oder $\gamma_1 = + (1 + i)\,\delta_2$.

Wenn aber $\alpha_1 + \gamma_2 = 0$ wäre, dann müßte $\beta_2 = 0$ und nach (6) $\delta_2 = 0$ sein, da $\alpha_2 \neq 0$ ist, damit auch $\beta_1 = 0$ und $\gamma_1 = 0$, ein Fall, der schon erledigt ist.

Für die weitere Untersuchung hat man also zwei Fälle:

I.

$$\beta_1 = +i\delta_2;\quad \beta_2 = +i(\alpha_1 + \gamma_2);\quad \gamma_1 = +(1-i)\delta_2.$$

Setzt man diese Werte in die Gleichungen ein, so sind außer (1), (2) und (10) auch (9) und (11) erfüllt. (12) wird gleich $i \cdot (6)$ und (5) gleich (2), so daß nur noch bleibt:

$$(6)\qquad \alpha_2\delta_2 + \gamma_2(\alpha_1 + \gamma_2) + i\alpha_1(\alpha_1 + \gamma_2) = 0,$$

$$(7)\qquad \alpha_2\delta_2 + i(\alpha_1^2 - \gamma_2^2) = 0.$$

Aus (7) folgt, da $\alpha_2 \neq 0$ ist: $\delta_2 = \frac{-i(\alpha_1^2 - \gamma_2^2)}{\alpha_2}$. Damit wird (6) $\gamma_2(\alpha_1 + \gamma_2) = 0$. Also hat man, da $\alpha_1 + \gamma_2 \neq 0$ (Seite 22 unten), $\gamma_2 = 0$. Dann ist aber $\beta_2 = +i\alpha_1$ und $\delta_2 = -i\alpha_1^2 : \alpha_2$ oder auch $\alpha_2 = -i\alpha_1^2 : \delta_2$. Man hat also:

$$x_2 = y_1,\quad y_2 = \frac{-ia^2 + ax_1 + iay_1 + ix_1y_1}{(1-i)x_1 + y_1},\quad \text{wo } a = \alpha_1 : \delta_2 \text{ ist.}$$

II.

Dieser Fall erledigt sich genau wie I., nur hat man bei i immer das Zeichen zu vertauschen.

§ 3.

In dem Falle, wo $\delta_1 \neq 0$ und $\alpha_2 = 0$ ist, lautet die allgemeine Transformation:

$$y_2 = \frac{+bx_1 + cy_1 + dxy_1}{a_1 + b_1x_1 + c_1y_1 + d_1x_1y_1}.$$

Setzt man nun $x_1 = 1 : u_1$, $y_1 = 1 : v_1$, $x_2 = 1 : u_2$, $y_2 = 1 : v_2$, so folgt:

$$u_2 = v_1,\quad v_2 = \frac{d_1 + cu_1 + b_1v_1 + a_1u_1v_1}{d + cu_1 + bv_1},\quad \text{also dieselbe}$$

Transformation wie bei § 2. Die Diskussion von § 3 würde also nichts Neues liefern. Ich habe dieselbe durchgeführt und bestätigt gefunden, daß alle sich ergebenden Transformationen durch Einführen des reziproken Wertes der Variabeln sich auf solche von § 2 reduzieren lassen.

§ 4.

Dieser Fall kann auf § 3 und damit auf § 2 zurückgeführt werden.

Die allgemeine Transformation ist:

$$x_2 = y_1, \quad y_2 = \frac{a + bx_1 + cy_1 + dx_1 y_1}{a_1 + b_1 x_1 + c_1 y_1 + d_1 x_1 y_1}.$$

Setzt man nun $x_1 = u_1 + \varepsilon$, $x_2 = u_2 + \varepsilon$, $y_1 = v_1 + \varepsilon$, $y_2 = v_2 + \varepsilon$, so ist:

$$u_2 = v_1, \quad v_2 = \frac{\alpha_1 u_1 + \alpha_2 + (\beta_1 u_1 + \beta_2) v_1}{\gamma_1 u_1 + \gamma_2 + (\delta_1 u_1 + \delta_2) v_1}.$$

Dabei sind die α, β, γ, δ Funktionen von a, b, c, d und ε, $\alpha_2 = a + \varepsilon(b + c - a_1) + \varepsilon^2(d - c_1 - b_1) - \varepsilon^3 d_1$. Man kann nun ε so bestimmen, daß $\alpha_2 = 0$ wird, daß man also den Fall von § 3 hat.

Damit sind alle Transformationen, welche $y_4 = x_1$ ergeben, behandelt. Daß sie auch wirklich richtig sind, ergab für jede einzelne die Ausrechnung von y_4. Dann wird auch $y_5 = y_1$, denn aus $y_4 = x_1$ folgt $y_5 = x_2 = y_1$.

Zusammenstellung der gefundenen Transformationen.

I.

y_2 ist nur von x_1 abhängig:

$x_2 = y_1$ und $y_2 = -x_1$ oder

$x_2 = y_1$ und $y_2 = -x_1 + b$ oder

$x_2 = y_1$ und $y_2 = \dfrac{ax_1 + b}{cx_1 - a}$.

II.

y_2 ist von x_1 und y_1 abhängig:

§ 1.

(1) $$x_2 = y_1, \quad y_2 = -ix_1 \pm (1 + i) y_1,$$

(2) $$y_2 = \frac{ax_1 + (1 - i) a y_1 - x_1 y_1}{+ ia + y_1},$$

(3) $$y_2 = \frac{+ ix_1 y_1}{\pm (1 - i) x_1 + y_1},$$

(4) $$y_2 = \frac{ax_1 + ix_1 y_1}{- a + (1 - i) x_1 + y_1},$$

(5) $$y_2 = \frac{ax_1 - (1 - i) a y_1 + ix_1 y_1}{+ ia - (1 - i) x_1 + y_1},$$

(6) $$y_2 = \frac{ax_1 + (1 + i) a y_1 + ix_1 y_1}{- ia + (1 - i) x_1 + y_1}.$$

§ 2.

(7) $$y_2 = +ia + ix_1 - (1-i)y_1,$$

(8) $$y_2 = \frac{1 + ax_1 + (a-c)y_1 + (a^2+c^2)x_1y_1}{c - (a^2+c^2)y_1},$$

(9) $$y_2 = \frac{-ia^2 + ax_1 + iay_1 + ix_1y_1}{+(1-i)x_1 + y_1}.$$

Reduktion der Transformationen.

I.

Wenn bei der dritten Transformation dieses Abschnittes $c = 0$ ist, so wird sie der zweiten gleich. Ist aber $c \neq 0$, so kann man statt $a:c$ und $b:c$ α und β schreiben, also $y_2 = \frac{\alpha x_1 + \beta}{x_1 - \alpha}$. Bestimmt man nun ε aus der Gleichung $\varepsilon^2 - 2\alpha\varepsilon - \beta = 0$ und macht folgende Substitution:

$$x_1 = u_1 + \varepsilon, \quad y_1 = v_1 + \varepsilon, \quad x_2 = u_2 + \varepsilon, \quad y_2 = v_2 + \varepsilon,$$

so folgt: $u_2 = v_1$ und $v_2 = \frac{a u_1}{u_1 - a}$, wo $a = \alpha - \varepsilon$ ist. Durch Einführen des reziproken Wertes der Variabeln erhält man: $v_2' = -u_1' + \frac{1}{a}$, also die zweite Transformation von I. Diese geht durch die Substitution: $x_1 = u_1 + \frac{b}{2}$ und $y_1 = v_1 + \frac{b}{2}$ über in $v_2 = -u_1$, also die erste Transformation von I. Setzt man in dieser $y_1 = v_1$ und $x_1 = u_1 v_1$, so folgt:

$$u_2 v_2 = v_1 \text{ und } v_2 = -u_1 v_1.$$

Setzt man hier den letzten Wert von v_2 in der ersten Transformation ein, so ist

$$u_2 = -\frac{1}{u_1}, \quad v_2 = -u_1 v_1 \quad \text{oder} \quad x_2 = -\frac{1}{x_1}, \quad y_2 = -x_1 y_1,$$

also der im ersten Kapitel behandelte Fall, daß x_2 nur von x_1 abhängt.

II.

1. α) $x_2 = y_1$, $y_2 = -ix_1 + (1+i)y_1$.
Setzt man $x_1 = u_1 - v_1$ und $y_1 = u_1 - iv_1$, so folgt:

$$u_2 - v_2 = u_1 - iv_1 \quad \text{und} \quad u_2 - iv_2 = -u_1 + v_1.$$

Subtrahiert man die zweite von der ersten, so ergibt sich:

$$-(1-i)v_2 = -(1+i)v_1 \quad \text{oder} \quad v_2 = iv_1.$$

Multipliziert man aber die erste mit i und subtrahiert die zweite, so ist

$$u_2 = u_1.$$

1. β) $x_2 = y_1$, $y_2 = -ix_1 - (1+i)y_1$. Setzt man hier

$$x_1 = -u_1 + iv_1 \quad \text{und} \quad y_1 = +iu_1 - iv_1, \quad \text{so folgt:}$$

$$-u_2 + iv_2 = iu_1 - iv_1 \quad \text{und} \quad iu_2 - iv_2 = iv_1 + u_1.$$

Durch Addition ergibt sich $-(1-i)u_2 = (1+i)u_1$ oder $u_2 = -iu_1$, was durch $u_1 = i : x_1$, $u_2 = i : x_2$ in

$$x_2 = ix_1$$

übergeht. Multipliziert man aber die erste mit i und addiert dann, so ist $v_2 = -v_1$, was durch $v_1 = y_1 x_1^2$ übergeht in

$$y_2 = y_1.$$

2. $x_2 = y_1$ und $y_2 = \dfrac{ax_1 + (1-i)ay_1 - x_1 y_1}{+ia + y_1}$.

Setzt man hier $x_1 = au_1(1+i) - ia$ und $y_1 = av_1(1+i) - ia$, so ist:

$$u_2 = v_1 \quad \text{und} \quad v_2 = \frac{-1 + u_1 + v_1 - u_1 v_1}{v_1} = \frac{-(1-u_1)(1-v_1)}{v_1},$$

wobei man beachten muß, daß $2i = (1+i)^2$ ist.

Setzt man weiter $u_1 = y_1$ und $v_1 = x_1(1-y_1)$, so folgt:

$$y_2 = x_1(1-y_1) \quad \text{und} \quad x_2(1 - x(1-y_1)) = -\frac{(1-y_1)(1-x_1(1-y_1))}{x_1(1-y_1)},$$

$$\text{oder} \quad y_2 = x_1(1-y_1) \quad \text{und} \quad x_2 = -\frac{1}{x_1},$$

indem man in der zweiten Transformation den Wert für y_2 aus der ersten einführt. Man hat damit die Transformation auf Kapitel I zurückgeführt.

3. Die Transformation: $y_2 = \dfrac{+ix_1 y_1}{\pm(1-i)x_1 + y_1}$ geht durch Einführen des reziproken Wertes der Variabeln in die Form 1 über.

4. $x_2 = y_1$ und $y_2 = \dfrac{ax_1 + ix_1 y_1}{-a + (1-i)x_1 + y_1}$ geht durch die Substitution: $x_1 = a : u_1$ und $y_1 = a : v_1$ über in:

$$\frac{a}{v_2} = \frac{\dfrac{a^2}{u_1} + i\dfrac{a^2}{u_1 v_1}}{-a + (1-i)\dfrac{a}{u_1} + \dfrac{a}{v_1}} \quad \text{oder} \quad v_2 = \frac{u_1 + (1-i)v_1 - u_1 v_1}{i + v_1}.$$

Man hat somit den Fall unter 2., wenn $a = 1$ ist.

5. Setzt man hier $x_1 = u_1 - a$ und $y_1 = v_1 - a$, so hat man:

$$x_2 = y_1,$$

$$y_2 = \frac{-a(1-i)u_1 + av_1 + au_1 - a^2 - (1-i)av_1 + (1-i)a^2 + iu_1v_1 - iau_1 - iav_1 + ia^2}{-(1-i)u_1 + v_1}.$$

Die Fortsetzung findet sich bei 3.

6. Setzt man $x_1 = u_1 + ia$ und $y_1 = v_1 + ia$, so ergibt sich:

$$u_2 = v_1,$$

$$v_2 = \frac{-ia[(1+i)a + (1-i)u_1 + v_1] + (1+i)av_1 + i(1+i)a^2 + iu_1v_1 - av_1}{(1+i)a + (1-i)u_1 + v_1}$$

oder $u_2 = v_1$ und $v_2 = \frac{-(1+i)au_1 + iu_1v_1}{(1+i)a + (1-i)u_1 + v_1}$,

also ein besonderer Fall von 4.

7. Setzt man $x_1 = u_1 - iv_1 + \frac{ia}{4} - \frac{a}{4}$ und $y_1 = iu_1 + iv_1 + \frac{ia}{4} - \frac{a}{4}$, so ist:

$$u_2 - iv_2 = iu_1 + iv_1 \quad \text{und}$$

$$iu_2 + iv_2 = -u_1 - iv_1.$$

Durch Addition erhält man $(1+i)u_2 = (i-1)u_1 = i(1+i)u_1$ oder $u_2 = iu_1$. Multipliziert man aber die erste Gleichung mit i und subtrahiert von der zweiten, so ist: $(i-1)v_2 = (1-i)v_1$ oder $v_2 = -v_1$, was durch $v_1 = y_1u_1^2$ in $y_2 = y_1$ übergeht.

8. Schreibt man $a + c = r$ und $a^2 + c^2 = s$ und setzt:

$$x_1 = \frac{c - ru_1}{s} \quad \text{und} \quad y_1 = \frac{c - rv_1}{s}, \quad \text{so folgt:}$$

$$u_2 = v_1, \quad \frac{c - rv_2}{s} = \frac{s + \frac{a(c - ru_1)}{s} + (a-c)\frac{(c - rv_1)}{s} + s\frac{(c - ru_1)(c - rv_1)}{s^2}}{rv_1}$$

oder $-rv_2 = \frac{-cv_1r + a^2 + c^2 + ac - aru_1 + ac - arv_1 - cru_1 + r^2u_1v_1}{rv_1}$,

oder $rv_2 = -\frac{r^2 - r^2u_1 - r^2v_1 + r^2u_1v_1}{rv_1}$ oder $v_2 = -\frac{1 - u_1 - v_1 + u_1v_1}{v_1}$.

Fortsetzung wie bei 2.

Wenn aber $a^2 + c^2 = 0$, also $c = \pm ia$ ist, so wird die Transformation identisch mit der in 7. behandelten, oder mit derjenigen, welche aus 7. durch Vertauschung des Zeichens von i sich ergibt.

9. Setzt man $x_1 = au_1 + \frac{a}{2}$ und $y_1 = av_1 + \frac{a}{2}$, so ergibt sich

$$u_2 = v_1,$$

$$a v_2 = \frac{-\frac{a}{2}(N) - i a^2 + a^2 u_1 + \frac{a^2}{2} + i a^2 v_1 + \frac{i a^2}{2} + i a^2 u_1 v_1 + \frac{i a^2 v_1}{2} + \frac{i a^2 u_1}{2} + \frac{i a^2}{4}}{-i(i+\frac{1}{2})a + (1-i) a u_1 + a v_1}.$$

Man rechnet zuerst den Nenner (N) und dann den Zähler. Das absolute Glied des Zählers ist: $\left(-\frac{1}{2} + \frac{i}{4} - i + \frac{1}{2} + \frac{i}{2} + \frac{i}{4}\right) a^2$ $= (i + \frac{1}{2}) a^2$. Der Koeffizient von u_1 ist: $a^2\left(-\frac{1}{2} + \frac{i}{2} + 1 + \frac{i}{2}\right)$ $= a^2(i + \frac{1}{2})$. Der Koeffizient von v_1 ist: $\left(-\frac{1}{2} + i + \frac{i}{2}\right) a^2$ $= (1 + i)(i + \frac{1}{2}) a^2$. Setzt man dann $i + \frac{1}{2} = b$, so lautet die Transformation:

$$x_2 = y_1, \quad y_2 = \frac{b x_1 + (1+i) b y_1 + i x_1 y_1}{-ib + (1-i) x_1 + y_1},$$

indem man wieder x_1, y_1 für die Variabeln setzt. Das ist aber die schon behandelte Transformation 6.

Es sind damit alle Cremonaschen Transformationen U, für welche $U^4 P = P$ ist und bei welchen ein Linienbüschel wieder in ein Linienbüschel übergeht, reduziert auf den Typus: $x_2 = x_1$ und $y_2 = i y_1$.

Die elementaren symmetrischen Funktionen erhält man als Koeffizienten der Potenzen und Produkte der α, β, γ in folgendem Ausdruck:

$$(\alpha x_1 + \gamma + \beta y_1)(\alpha x_2 + \gamma + \beta y_2)(\alpha x_3 + \gamma + \beta y_3)(\alpha x_4 + \gamma + \beta y_4)$$
$$= (\alpha x_1 + \gamma + \beta y_1)(\alpha x_1 + \gamma + i\beta y_1)(\alpha x_1 + \gamma - \beta y_1)(\alpha x_1 + \gamma - i\beta y_1)$$
$$= (\alpha x_1 + \gamma)^4 - \beta^4 y_1^4$$
$$= \alpha^4 x_1^4 + \alpha^3 \gamma\, 4 x_1^3 + \alpha^2 \gamma^2\, 6 x_1^2 + \alpha \gamma^3\, 4 x_1 + \gamma^4 - \beta^4 y_1^4.$$

Es sind also alle mit Ausnahme der hier als Koeffizienten auftretenden elementaren symmetrischen Funktionen Null.

Demnach bilden $4 x_1$ und $-y_1^4$ ein Hauptpaar, durch welches die anderen sich rational darstellen lassen.

II. Abschnitt.

Involutorische Transformationen einer Gruppe von n Punkten.

Von den in Kapitel I aufgestellten Transformationen lassen sich die ungebrochenen sehr leicht auf eine Gruppe von n Punkten ausdehnen, wenigstens wenn n eine Primzahl ist. Man hat

$$\text{A:}\quad x_2 = a + bx_1,$$
$$x_{n+1} = a + ab + ab^2 + \cdots ab^{n-1} + b^n x_1 = x_1,$$
$$\text{also}\quad b^n = 1 \quad \text{und} \quad a(1 + b + b^2 + \cdots b^{n-1}) = 0.$$

Wenn $a = 0$ ist, so ist $b = \varepsilon^\nu$, wenn man mit ε eine n^{te} Einheitswurzel bezeichnet. Man hat also

$$x_2 = \varepsilon^\nu x_1.$$

Wenn $a \neq 0$, dann ist $b = \varepsilon^\nu$, wo aber bei ν die durch n teilbaren Zahlen ausgeschlossen sind. Also

$$x_2 = a + \varepsilon^\nu x_1.$$

Setzt man hier $x_1 = u_1 + \frac{a}{1-\varepsilon^\nu}$, $x_2 = u_2 + \frac{a}{1-\varepsilon^\nu}$, so folgt $u_2 = \varepsilon^\nu u_1$.

$$\text{B:}\quad y_2 = A + By_1,$$
$$y_3 = A^{(1)} + B^{(1)}A + B^{(1)}By_1,$$
$$y_4 = A^{(2)} + B^{(2)}A^{(1)} + B^{(2)}B^{(1)}A + B^{(2)}B^{(1)}By_1,$$

wo die $B^{(1)}B^{(2)}\ldots$, $A^{(1)}A^{(2)}\ldots$ bedeuten, daß in B resp. A die Transformation einmal, zweimal usw. vorgenommen wurde.

Daraus läßt sich das Bildungsgesetz für y_{n+1} ablesen:

$$y_{n+1} = A^{(n-1)} + B^{(n-1)}A^{(n-2)} + B^{(n-1)}B^{(n-2)}A^{(n-3)} + \cdots$$
$$+ B^{(n-1)}B^{(n-2)}\cdots By_1.$$

Man hat also für A und B folgende Gleichungen:

$$BB^{(1)}B^{(2)}\dots B^{(n-2)}B^{(n-1)}=1,$$
$$A^{(n-1)}+B^{(n-1)}A^{(n-2)}+B^{(n-1)}B^{(n-2)}A^{(n-3)}+\dots$$
$$+B^{(n-1)}\dots B^{(1)}A=0.$$

Für das Folgende hat man zwei Fälle zu unterscheiden, je nachdem

$$x_2=x_1 \quad \text{oder}$$
$$x_2=\varepsilon^\nu x_1 \quad \text{ist.}$$

Wenn $x_2=x_1$, dann lauten die Gleichungen

$$B^n=1 \quad \text{und} \quad A(1+B+B^2+\dots+B^{n-1})=0.$$

Es kehren dieselben Betrachtungen wieder wie unter A. Die Form $y_2=y_1$ ist ausgeschlossen.

Wenn aber $x_2=\varepsilon^\nu x_1$ ist, dann kann man ganz analog wie oben (Seite 8) verfahren.

Es sei also $B(x_1)=(x_1-a)^{p_0}(x_1-\varepsilon^\nu a)^{p_1}(x_1-\varepsilon^{2\nu}a)^{p_2}\cdots C(x_1)$, wo $C(x_1)$ für kein $x_1=\varepsilon^{\nu p}a$ mehr verschwindet oder ∞ wird. $BB^{(1)}B^{(2)}\dots B^{(n-1)}=1$ wird dann

$$(x_1-a)^{p_0}(x_1-\varepsilon^\nu a)^{p_1}(x_1-\varepsilon^{2\nu}a)^{p_2}\cdots(x_1-\varepsilon^{(n-1)\nu}a)^{p_{n-1}}C(x_1)$$
$$\times(\varepsilon^\nu x_1-a)^{p_0}(\varepsilon^\nu x_1-\varepsilon^\nu a)^{p_1}(\varepsilon^\nu x_1-\varepsilon^{2\nu}a)^{p_2}\cdots(\varepsilon^\nu x_1-\varepsilon^{(n-1)\nu}a)^{p_{n-1}}C(\varepsilon^\nu x_1)$$
$$\vdots \qquad\qquad \vdots$$
$$\times(\varepsilon^{(n-1)\nu}x_1-a)^{p_0}(\varepsilon^{(n-1)\nu}x_1-\varepsilon^\nu a)^{p_1}\cdots$$

Da nun n eine Primzahl ist, so sind die $(\varepsilon^\nu)^\varrho$ für $(\varrho=0,1,n-1)$ alle verschieden und $(\varepsilon^\nu)^\varrho$ liefert sämtliche Einheitswurzeln. Man erhält also, abgesehen von einer Potenz von ε,

$$(x_1-a)^{\Sigma p_i}\cdot(x_1-\varepsilon a)^{\Sigma p_i}\dots(x_1-\varepsilon^{(n-1)}a)^{\Sigma p_i}\cdot\prod_{\lambda=0}^{\lambda=n-1}C(\varepsilon^\lambda x_1).$$

Da nun die elementaren symmetrischen Funktionen der Einheitswurzeln alle gleich Null sind, außer $\prod_1^{n-1}\varepsilon^\lambda$, so hat man

$$(x_1^n-a^n)^{\Sigma p_i}\prod_0^{n-1}C(\varepsilon^\lambda x_1)=1, \quad \text{also} \quad \sum p_i=0.$$

Somit ist also, da $p_{n-1}=-p_0-p_1-p_2-p_3\cdots-p_{n-2}$ ist,

$$B(x_1)=\frac{(x_1-a)^{p_0}(\varepsilon^\nu x_1-a)^{-p_1-p_2-p_3\cdots-p_{n-2}}\dots(\varepsilon^{(n-2)\nu}x_1-a)^{-p_1}}{(\varepsilon^\nu x_1-a)^{p_0}(\varepsilon^{2\nu}x_1-a)^{-p_1-p_2-p_3\cdots-p_{n-2}}\dots(\varepsilon^{(n-1)\nu}x_1-a)^{-p_1}}\cdot C(x_1),$$

indem man jeweils die nötigen Faktoren im Zähler und Nenner beifügt.

In derselben Weise kann man nun auch $C(x_1)$ zerlegen und erhält endlich

$$x_2 = \varepsilon^\nu x_1 \quad \text{und} \quad y_2 = \frac{\prod E_\varrho(\varepsilon^{\nu(\varrho-1)} x_1)}{\prod E_\varrho(\varepsilon^{\nu\varrho} x_1)} (\varepsilon^\nu)^\sigma y_1 + A, \qquad (\varrho = 1 \cdots n-1)$$

Dabei sind E_ϱ ganze rationale Funktionen.

Der Koeffizient von y_1 ist mit irgendeiner Einheitswurzel multipliziert, die jedenfalls unter $(\varepsilon^\nu)^\sigma$ enthalten ist, wenn σ von 0 bis $n-1$ geht.

Setzt man nun:

$$y_1 = v_1 : \prod E_\varrho(\varepsilon^{\nu(\varrho-1)} x_1) \quad \text{und}$$

$$y_2 = v_2 : \prod E_\varrho(\varepsilon^{\nu\varrho} x_1), \qquad (\varrho = 1 \cdots n-1)$$

so ist: $x_2 = \varepsilon^\nu x_1$ und $v_2 = G(x_1) + (\varepsilon^\nu)^\sigma v_1$,

wo G eine ganze rationale Funktion ist. Setzt man weiter die umkehrbare Substitution: $v_1 = x_1^\sigma w_1$, $v_2 = (\varepsilon^\nu)^\sigma x_1^\sigma w_2$, so folgt:

$$x_2 = \varepsilon^\nu x_1 \quad \text{und} \quad w_2 = G_1(x_1) + w_1.$$

Nun findet man, ganz wie bei einer Gruppe von vier Punkten, durch Zerlegung von G_1 die folgende Transformation:

$$x_2 = \varepsilon^\nu x_1 \quad \text{und} \quad w_2 = w_1 + x_1 K_1(x_1^n) + x_1^2 K_2(x_1^n) + \cdots x_1^{(n-1)} K_{n-1}(x_1^n).$$

Setzt man nun:

$$w_1 = y_1 + \sum \frac{x_1^\lambda K_\lambda(x_1)}{\varepsilon^{\lambda\nu} - 1}, \quad \text{also} \quad w_2 = y_2 + \sum \frac{(\varepsilon^\nu x_1)^\lambda K_\lambda(x_1)}{\varepsilon^{\lambda\nu} - 1},$$

so folgt:

$$x_2 = \varepsilon^\nu x_1 \quad \text{und} \quad y_2 = y_1.$$

Es wird nämlich der Koeffizient von K_τ gleich:

$$-\frac{(\varepsilon^\nu x_1)^\tau}{\varepsilon^{\tau\nu} - 1} + \frac{x_1^\tau}{\varepsilon^{\tau\nu} - 1} + x_1^\tau = 0.$$

Also hat man auch hier mit Vertauschung der Variabeln den Typus

$$x_2 = x_1 \quad \text{und} \quad y_2 = \varepsilon y_1.$$